ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 **Межвузовский сборник научных трудов** **2015**

УДК 531.383

Ю.А. Годоров, С.В. Лутманов

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2-396-309

АНАЛИЗ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ВЫЗВАННЫХ КОНИЧЕСКИМ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Разработана схема численного эксперимента, имитирующего коническое вращение тела и позволяющего оценить качество вычисляемых законов изменения параметров ориентации.

Ключевые слова: волоконно-оптический гироскоп; коническое движение; углы Эйлера–Крылова.

Введение

Волоконно-оптические гироскопы (ВОГ) предназначены для определения ориентации твердого тела в абсолютном пространстве. В данной статье принимается, что за ориентацию тела в абсолютном пространстве отвечают углы Эйлера–Крылова (см. рис. 1), которые образуют оси координат подвижной системы, связанной с телом, и системы отсчета, движущейся поступательно по отношению к абсолютной системе.

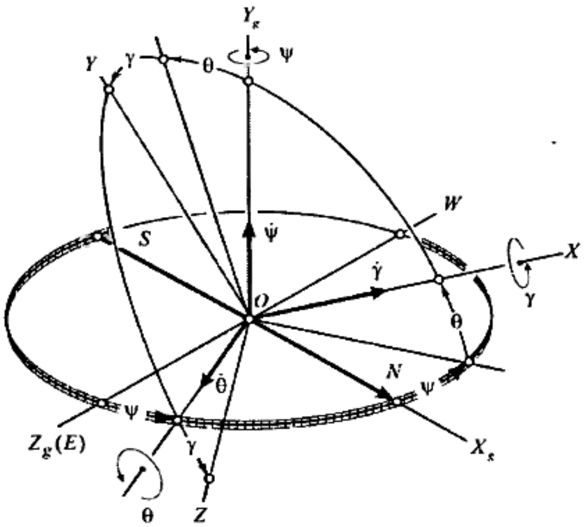

Рис. 1. Взаимное положение связанной и абсолютной систем координат

В процессе движения тела измеряются величин p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на оси подвижной системы координат. Подставляя полученные законы угловых скоростей в кинематические уравнения Эйлера–Крылова [1], связывающие выбранные параметры ориентации с проекциями вектора угловой скорости, и интегрируя их с соответствующими начальными условиями, можно определить законы изменения этих параметров (углов Эйлера–Крылова). Данная схема хорошо работает не для всех режимов движения тела. Существует особый частный случай углового движения – коническое вращение, при котором в сигнале гироскопа появляется постоянное смещение, притом, что ориентация самого гироскопа за одно полное колебание не изменяется. Это смещение является следствием некоммутативности поворотов и не является ошибкой прибора. Компенсация указанного смещения путем выбора подходящего алгоритма вычисления параметров ориентации позволит уменьшить общую погрешность прибора.

В связи с вышесказанным становится актуальной разработка схемы численного эксперимента, который имитирует коническое вращение тела и позволяет оценить качество вычисленных законов изменения параметров ориентации.

1. Коническое движение

Коническое движение – особый вид колебательного движения, при котором одна ось связанной системы координат описывает конус, а две другие движутся по гармоническому закону со сдвигом фаз в 90^0. Структура конического движения показана на рис. 2.

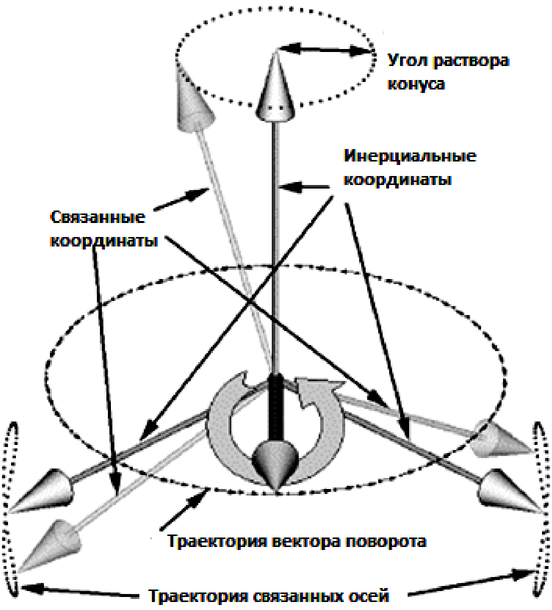

Рис. 2. Структура конического движения

В работе [2] конический закон движения тела в кватернионах ориентации описывается формулой

$$\Lambda(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\\ \lambda_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\dfrac{\Delta\Phi}{2})\\ 0\\ \sin(\dfrac{\Delta\Phi}{2})\cos(2\pi ft)\\ \sin(\dfrac{\Delta\Phi}{2})\sin(2\pi ft)\end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $\Delta\Phi -$ угол раствора конуса, $f -$ частота, с которой ось, описывает конус, $t -$ текущее время. Для определения закона изменения углов Эйлера–Крылова подставим выражение (1.1) в формулы

$$\begin{gathered}\psi^{эт}=arctg\left(-\frac{2\lambda_1\lambda_3-2\lambda_0\lambda_2}{2\lambda_1^2+2\lambda_0^2-1}\right),\\ \theta^{эт}=\arcsin\left(2\lambda_1\lambda_2+2\lambda_0\lambda_3\right), \qquad (1.2)\\ \gamma^{эт}=arctg\left(-\frac{2\lambda_2\lambda_3-2\lambda_0\lambda_1}{2\lambda_0^2+2\lambda_2^2-1}\right)\end{gathered}$$

[3], связывающие углы Крылова–Эйлера с кватернионом ориентации. В результате получим

$$\psi^{эт}(t)=$$

$$=arctg\left(-\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\cos\left(\dfrac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2\left(\dfrac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right),$$

$$\theta^{эт}(t)=,$$

$$=\arcsin\left(2\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin(2f\pi t)\right), \qquad (1.3)$$

$$\gamma^{эт}(t)=$$
$$=-arctg\left(\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\sin(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2(2f\pi t)+2\cos^2(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right).$$

Зависимости (1.3) представляют собой закон изменения углов Крылова–Эйлера в предположении, что тело совершает коническое движение. В дальнейшем этот закон будем считать эталонным, т.е. таким, с которым будет сравниваться рассчитываемый закон движения.

2. Описание численного эксперимента

С целью имитации процесса измерения вектора угловой скорости, т.е. определения функций

$$p=p^{изм}(t),\ q=q^{изм}(t),\ r=r^{изм}(t),$$

подставим эталонные зависимости (1.3) в кинематические уравнения Эйлера–Крылова

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}&=\frac{1}{\cos\theta}\left[q\cos\gamma-r\sin\gamma\right],\\
\dot{\theta}&=q\sin\gamma+r\cos\gamma,\\
\dot{\gamma}&=p-tg\theta\left[q\cos\gamma-r\sin\gamma\right].
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{эт}&=\frac{1}{\cos\theta^{эт}}\left[q\cos\gamma^{эт}-r\sin\gamma^{эт}\right],\\
\dot{\theta}^{эт}&=q\sin\gamma^{эт}+r\cos\gamma^{эт},\\
\dot{\gamma}^{эт}&=p-tg\theta^{эт}\left[q\cos\gamma^{эт}-r\sin\gamma^{эт}\right].
\end{aligned}\tag{2.2}$$

Разрешая уравнения (2.2) относительно проекций вектора угловых скоростей p,q,r находим:

$$
\begin{aligned}
&p^{изм}(t) = \\
&= \dot{\gamma}^{эт}(t) + \dot{\psi}^{эт}(t)\sin\theta^{эт}(t), \\
&q^{изм}(t) = \\
&= \dot{\psi}^{эт}(t)\cos\gamma^{эт}(t)\cdot\cos\theta^{эт}(t) + \dot{\theta}^{эт}(t)\cdot\sin\gamma^{эт}(t), \\
&r^{изм}(t) = \\
&= \dot{\theta}^{эт}(t)\cdot\cos\gamma^{эт}(t) - \dot{\psi}^{эт}(t)\cdot\cos\theta^{эт}(t)\cdot\sin\gamma^{эт}(t).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Формулы (2.3) описывают непрерывный закон изменения проекций вектора угловой скорости при коническом движении. Реальные измерения в силу своей дискретности не позволяют получить зависимости (2.3) в полном объеме. При проведении числовых экспериментов на базе формул (2.3) нарабатывается трехмерный массив значений проекций вектора угловой скорости с шагом, отвечающим частоте сбора информации датчиками. Определение измеренного закона изменения углов Эйлера–Крылова осуществляется путем интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\theta}\left[q^{изм}(t)\cos\gamma - r^{изм}(t)\sin\gamma\right], \\
&\dot{\theta} = q^{изм}(t)\sin\gamma + r^{изм}(t)\cos\gamma, \\
&\dot{\gamma} = p^{изм}(t) - tg\theta\left[q^{изм}\cos\gamma - r\sin\gamma\right].
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

относительно углов Эйлера–Крылова ψ, θ, γ с начальными условиями:

$$
\psi(0) = \psi^{эт}(0) =
$$

$$
= a\,rctg\left(-\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right)\Bigg|_{t=0} =
$$

$$
= -arctg\left(\frac{2\cdot\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right) = -arctg\left(\frac{\sin\Delta\Phi}{\cos\Delta\Phi}\right) = -\Delta\Phi, \tag{2.5}
$$

$$\theta(0)=\theta^{эт}(0)=$$

$$=\arcsin\left(2\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(2f\pi t\right)\right)\Bigg|_{t=0}=0,$$

$$\gamma(0)=\gamma^{эт}(0)=$$

$$=-arctg\left(\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\sin(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2(2f\pi t)+2\cos^2(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right)\Bigg|_{t=0}=0.$$

Пусть $\psi=\hat{\psi}(t), \theta=\hat{\theta}(t), \gamma=\hat{\gamma}(t)-$ решение системы (2.4) с начальными условиями (2.5). Качество проведенного эксперимента оценим по критерию

$$I\left[\hat{\psi}(\cdot),\hat{\theta}(\cdot),\hat{\gamma}(\cdot)\right]=$$

$$=\frac{\int\limits_0^T\sqrt{\left(\hat{\psi}(t)-\psi^{эт}(t)\right)^2+\left(\hat{\theta}(t)-\theta^{эт}(t)\right)^2+\left(\hat{\gamma}(t)-\gamma^{эт}(t)\right)^2}\,dt}{\int\limits_0^T\sqrt{\left(\psi^{эт}(t)\right)^2+\left(\theta^{эт}(t)\right)^2+\left(\gamma^{эт}(t)\right)^2}\,dt}. \qquad (2.6)$$

Очевидно, чем меньше его величина, тем точнее алгоритм определения изменения углов Эйлера–Крылова.

Были проведены три опыта. В первом из них предполагалось, что процесс измерения проекций вектора угловой скорости происходил непрерывно, во втором – съем информации с датчиков осуществлялся дискретно с частотой 400 Гц, в третьем опыте частота съема информации была увеличена в 2 раза до 800 Гц. В последних двух случаях функции

$$p=p^{изм}(t), q=q^{изм}(t), r=r^{изм}(t)$$

отождествлялись с интерполяционными полиномами, аппроксимирующими наработанный трехмерный массив данных.

Все расчеты проводились в среде пакета Wolfram Mathematica–8. В процессе вычислений принималось:

$$\Delta\Phi=\frac{\pi}{180}\,рад,\quad f=100\frac{1}{сек},\quad T=1сек.$$

3. Графики эталонных законов изменения углов Эйлера–Крылова

Графики эталонных законов изменения углов Эйлера–Крылова для конического вращения представлены на рис. 3–5.

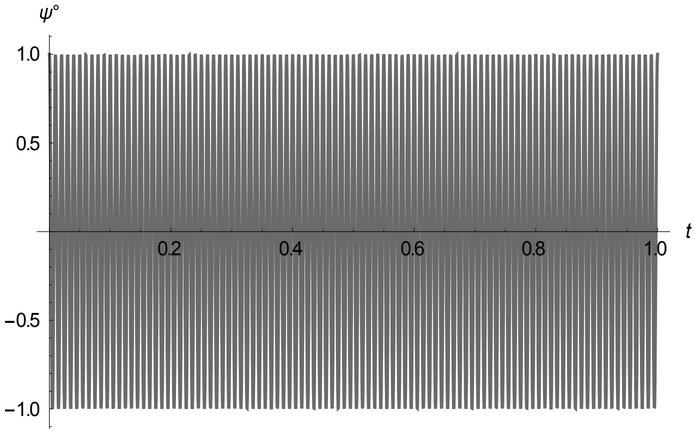

Рис. 3. График функции $\psi = \psi^{эт}(t)$

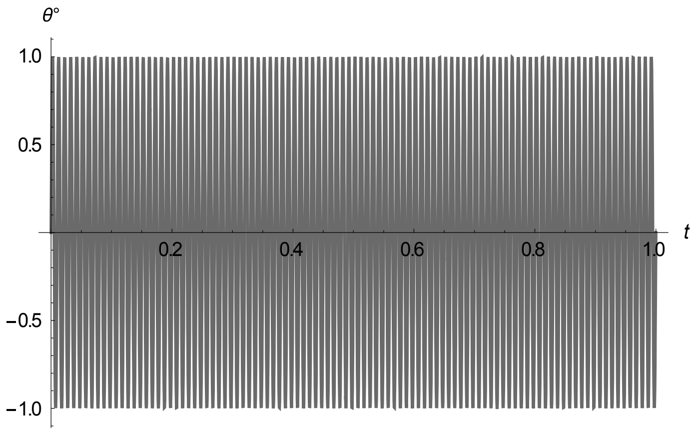

Рис. 4. График функции $\theta = \theta^{эт}(t)$

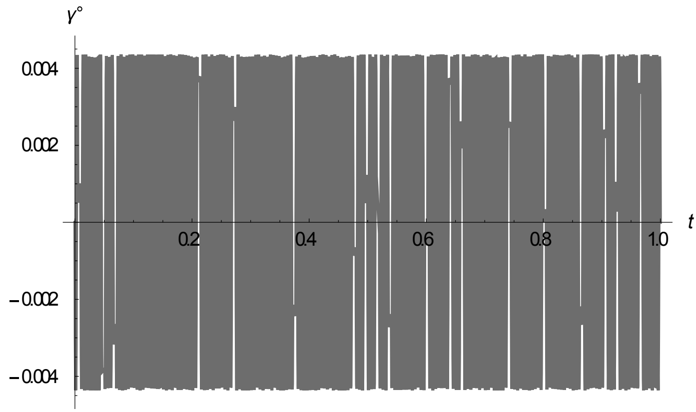

Рис. 5. График функции $\gamma = \gamma^{эт}(t)$

4. Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова в первом опыте

Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова для конического вращения в первом опыте представлены на рис. 6–8.

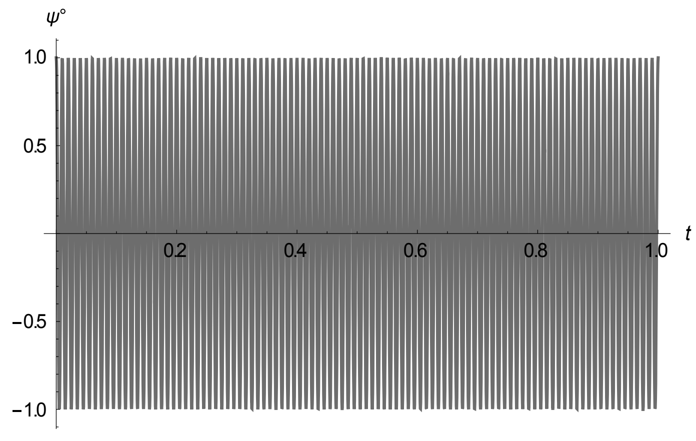

Рис. 6. График функции $\psi = \hat{\psi}_1(t)$

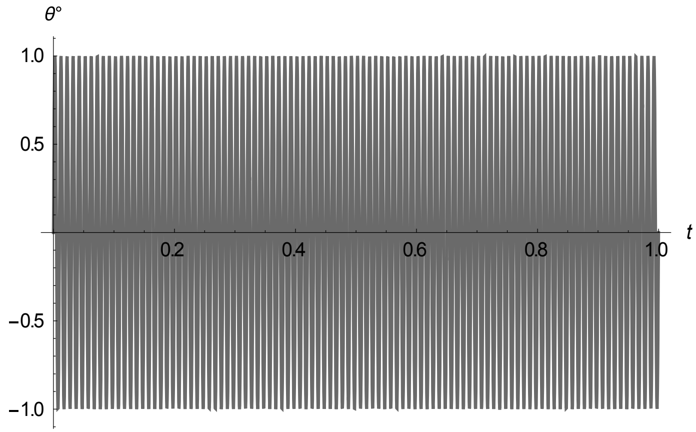

Рис. 7. График функции $\theta = \hat{\theta}_1(t)$

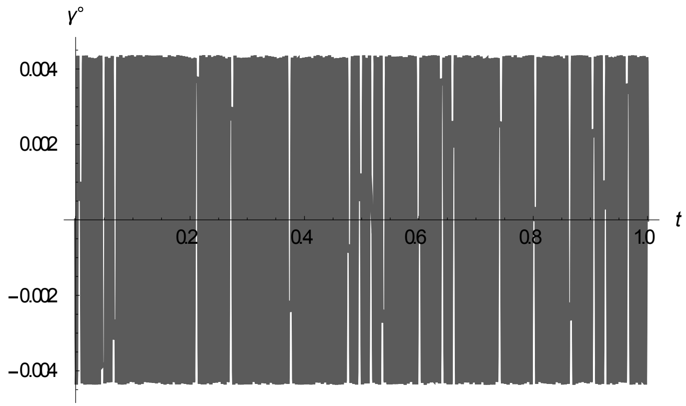

Рис. 8. График функции $\gamma = \hat{\gamma}_1(t)$

Критерий (2.6) здесь принял значение $I\left[\hat{\psi}_1(\cdot), \hat{\theta}_1(\cdot), \hat{\gamma}_1(\cdot)\right] = 0.000007$.

5. Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова во втором опыте

Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова для конического вращения во втором опыте представлены на рис. 9–11.

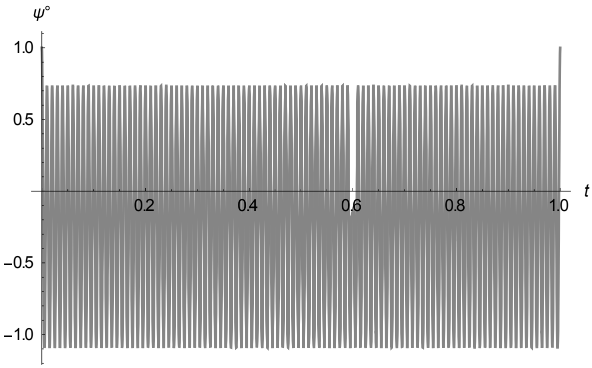

Рис. 9. График функции $\psi = \hat{\psi}_2(t)$

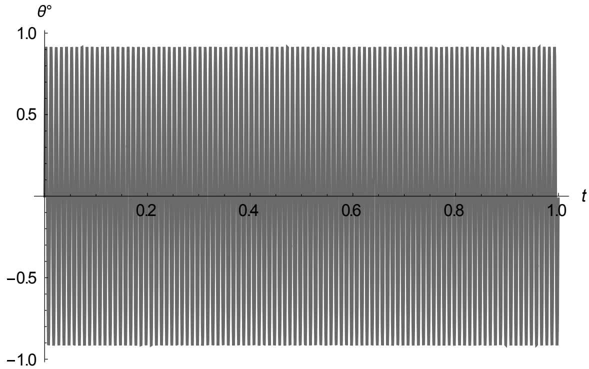

Рис. 10. График функции $\theta = \hat{\theta}_2(t)$

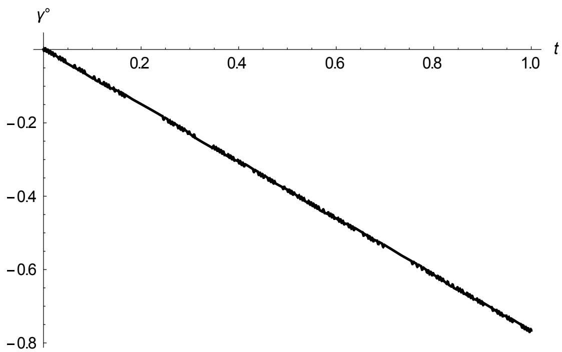

Рис. 11. График функции $\gamma = \hat{\gamma}_2(t)$

Критерий (2.6) здесь принял значение

$$I\left[\hat{\psi}_2(\cdot),\, \hat{\theta}_2(\cdot),\, \hat{\gamma}_2(\cdot)\right] = 0.444134\,.$$

6. Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова в третьем опыте

Графики законов изменения углов Эйлера–Крылова для конического вращения в третьем опыте представлены на рис. 12–13.

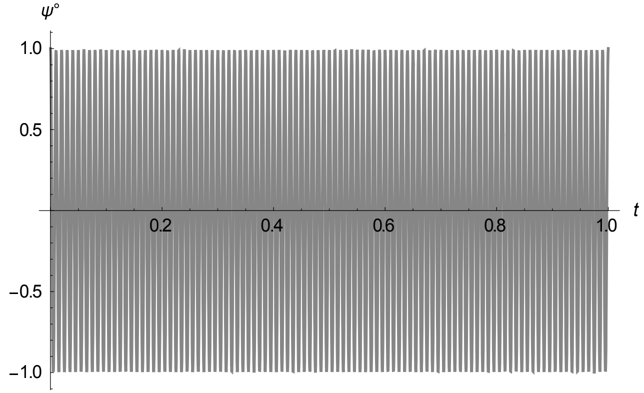

Рис. 12. График функции $\psi = \hat{\psi}_3(t)$

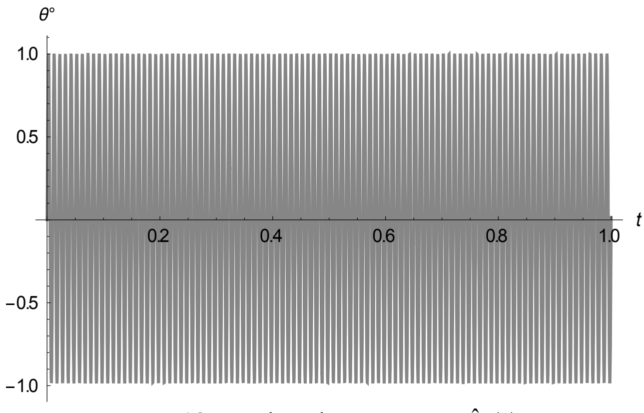

Рис. 13. График функции $\theta = \hat{\theta}_3(t)$

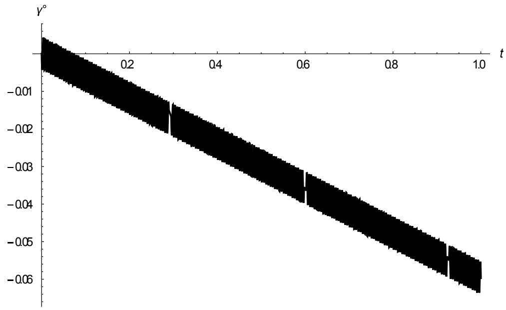

Рис. 14. График функции $\gamma = \hat{\gamma}_3(t)$

Здесь критерий (2.6) принял значение $I\left[\hat{\psi}_3(\cdot), \hat{\theta}_3(\cdot), \hat{\gamma}_3(\cdot)\right] = 0.0320714$.

Заключение

Из анализа результатов проведенных экспериментов следует, что имеет место "уход" вычисленного закона изменения угла γ от его эталонного закона. Этот "уход" тем меньше, чем выше частота съема информации. В пределе, когда съем информации непрерывен, "уход" практически отсутствует. Этот факт подтверждается графиком на рис. 8 и малым значением критерия (2.6). Однако практическая реализация непрерывного снятия информации ограничена техническими возможностями приборов. Таким образом, предложенная схема построения законов изменения углов Эйлера–Крылова в условиях конического движения требует принципиальной доработки.

Библиографический список

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.

2. *Salychev O.* Inertial Systems in Navigation and Geophysics. Moscow: Bauman MSTU Press, 1998. 352 p.

3. *Матвеев В.В.* Основы построения бесплатформенных инерциальных систем. СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2009. 280 с.